Résumé 04 : Séries à termes positifs

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E sera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

I SÉRIES CONVERGENTES ET DIVERGENTES

§ I. ***Définition.—*** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles.
On note formellement $\sum u_n$, ou $\left(\sum u_n\right)$, ou encore $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ cette série.

La série $\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$. Dans le cas contraire, elle est dite **divergente.**

Si la série converge, on note $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k} = \ell$.

- On note de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$. La suite (R_n), appelée suite des restes partiels, converge évidemment vers 0. De plus, $R_n \geqslant 0 \Longleftrightarrow S_n \leqslant \lim S_n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = S_n - S_{n-1}$, et si la série converge, u_n est aussi égal à $R_{n-1} - R_n$.
- Toute série est une suite (de sommes partielles), mais la réciproque est vraie, en vertu de l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k).$$

Au vu de tous les outils que nous allons développer pour l'étude des séries, il sera donc fructueux à l'occasion d'étudier la série télescopique pour en déduire des propriétés de la suite (u_n). On s'appuiera à ce propos principalement sur l'équivalence

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}}(u_{n+1} - u_n) \text{ converge}.$$

REMARQUES :

1. On fera attention à ce que $\sum_{n\geqslant n_0} u_n \neq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$, le premier étant une série et le deuxième un réel, ou un complexe. Par exemple, on peut toujours parler de la première alors que la seconde n'existe que si la suite converge : $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln k$ n'existe pas, contrairement à $\left(\sum_{k\geqslant 1}\ln k\right)$.
2. Toute estimation du reste, du type majoration ou équivalent, nous donnera une information sur la qualité de convergence de la suite (S_n).

Une condition NECESSAIRE de convergence :

$$\textbf{SI} \sum u_n \text{ converge, } \textbf{ALORS } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La réciproque est évidemment fausse, comme le prouve l'exemple de la série harmonique. Toute série $\sum u_n$ dont le terme général ne tend pas vers 0 sera dite grossièrement divergente.

§ I. ***Les séries de référence.—***

- **Les séries géométriques** : Si $a \in \mathbb{C}$, une série géométrique de raison a est $\displaystyle\sum_{k\geqslant k_0} a^k$. Fait exceptionnel, on a une expression simple de ses sommes partielles : $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{n} a^k = \begin{cases} \dfrac{a^{k_0} - a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1, \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$ Cette série converge si $|a| < 1$ et diverge grossièrement sinon.
- **Les séries de Riemann** $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}\right)$, où $s \in \mathbb{R}$.
  Cette série converge si et seulement si $s > 1$.
  On peut définir aussi pour tout complexe s de partie réelle > 1 le réel $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$. Cette série est absolument convergente pour tout s de partie réelle > 1. C'est la fonction zeta de Riemann.
- **La série harmonique** $H_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. Elle diverge, la suite de ses sommes partielles tend est équivalente à $(\ln n)$. Plus finement, on retiendra qu'il existe une constante réelle $\gamma > 0$ telle que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)}.$$

- **Les séries télescopiques** $\sum_{n\geqslant n_0}(u_{n+1}-u_n)$, dont on a aussi une expression des sommes partielles : $\sum_{n=n_0}^{N}(u_{n+1}-u_n)=u_{N+1}-u_{n_0}$.

II Comparaisons de termes généraux

Ce sont exactement les séries dont la suite des sommes partielles est croissante, si bien qu'une série à terme général positif est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées. Dans le cas contraire, la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$. L'heuristique ici sera de comparer le terme général u_n au terme général d'une série de référence, i.e dont on connait la nature.

- **Majoration du terme général :** Si à partir d'un certain rang $0\leqslant u_n\leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- **Règle de D'Alembert :** Si (u_n) est une suite à valeurs strictement positives, et si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite ℓ, alors
  - Si $\ell<1$, la série $\sum u_n$ converge.
  - Si $\ell>1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Remarques :

Cette règle portera ses fruits dans très peu de cas. En revanche, son efficacité sera redoutable pour les séries entières.
Et si $\ell=1$, on ne peut pas conclure. Par exemple, si $u_n=\frac{1}{n^\alpha}$, alors le rapport de deux termes consécutifs tend vers 1, or on sait que selon α, la série correspondante peut converger ou diverger.

- **Règle de $n^\alpha u_n$:** Soit (u_n) une suite réelle positive.
  - S'il existe $\alpha>1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
  - S'il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que $(n^\alpha u_n)$ tend vers $+\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

  On pourra essayer de prouver la convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\exp-\ln^2 n$.
- **Comparaison Série/Intégrale** : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, à valeurs positives, et décroissante. Alors la série $\sum\left(\int_{n-1}^{n}f(t)dt-f(n)\right)$ converge. En particulier,
$$\sum_{n\geqslant 0}f(n)\text{ converge}\iff\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ converge.}$$
  Il est ici NECESSAIRE de bien connaître la preuve, afin de l'adapter au cas où f est croissante.
- Soient (u_n) et (a_n) deux suites positives.
  - Si $u_n=O(a_n)$ et $\sum a_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
  - Si $u_n=o(a_n)$ et $\sum a_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
  - Si $u_n\sim a_n$, alors $\sum u_n$ converge $\iff\sum a_n$ converge.

Remarques :

Pour justifier la présence de l'hypothèse de positivité sur (a_n), retenez que
$$\begin{cases}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)\sim\frac{(1)^k}{\sqrt{k}},\\ \sum\frac{(1)^k}{\sqrt{k}}\text{ converge.}\end{cases}\quad\text{mais }\sum\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)\text{ diverge.}\tag{1}$$
J'aurai l'occasion de vous reservir ce contre-exemple.

- **Sommation des relations de comparaison :**
  Soient (u_n) et (a_n) deux suites réelles positives.
  1. On suppose que $\sum a_n$ converge.
     (a) Si $u_n=O(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}u_k=O\left(\sum_{k=n}^{+\infty}a_k\right)$.
     (b) Si $u_n=o(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}u_k=o\left(\sum_{k=n}^{+\infty}a_k\right)$.
     (c) Si $u_n\sim a_n$, alors $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}u_k\sim\sum_{k=n}^{+\infty}a_k$.
  2. On suppose que $\sum a_n$ diverge.
     (a) Si $u_n=O(a_n)$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k=O\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)$.
     (b) Si $u_n=o(a_n)$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k=o\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)$.
     (c) Si $u_n\sim a_n$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k\sim\sum_{k=0}^{n}a_k$.

Remarques :

Si $\sum a_n$ diverge, il n'y a pas de reste R_n, donc aucun moyen de se tromper entre le 1. et le 2.

ANNEXE

A Quelques erreurs...

...à ne pas commettre. Je vous laisse proposer des contre-exemples.

1. Si $u_n \sim a_n$ et $\sum a_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. FAUX
2. Si $u_n = 1/n + o(1/n)$, alors (u_n) décroit.FAUX
3. Si $a_n = o(1/n)$, alors $\sum a_n$ converge. FAUX
4. $(1-1/n)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, car $1 - 1/n \sim 1$.FAUX

B Quelques exercices classiques

Exercices :

CCP analyse 7 :

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. àtudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$.

   (i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

Exercices :

CCP analyse 6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercices :

CCP analyse 5 :

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas** $\alpha > 0$

   Étudier la nature de la série.
   Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.